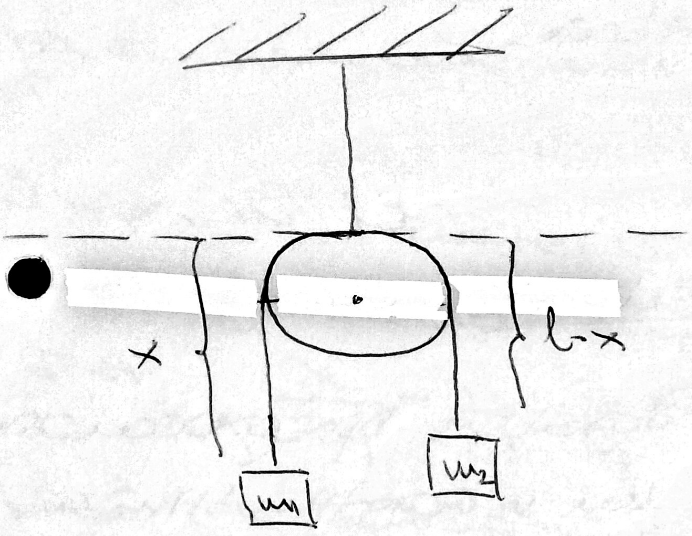
Παραδείγματα

Η μηχανή του Atwood



Κινητική Ενέργεια:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2$$

Δυναμική Ενέργεια:

$$V = -m_1 g x - m_2 g (l-x)$$

Συνολικά:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + (m_1-m_2) g x + m_2 g l$$

Η εξίσωση κίνησης/ εξίσωση Euler:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow (m_1-m_2)g - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(m_1+m_2)2\dot{x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow (m_1-m_2)g-(m_1+m_2)\ddot{x}=0 \Rightarrow \boxed{\ddot{x}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g}$$

<u>Άσκηση</u>

Ν.Β. το κέντρο μάζας του συστήματος.

• <u>Σύνδεση με τον νόμο του Νεύτωνα</u>

Σε ένα πεδίο δυνάμεων, οι δυνάμεις προέρχονται από ένα δυναμικό $V=V(x,y,z)$ και η αντίστοιχη κινητική ενέργεια είναι: $T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$

Τότε γνωρίζουμε ότι: $L=T-V$ και άρα χρειαζόμαστε τρεις εξισώσεις κίνησης:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}}=0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial z}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}m2\dot{x}\right)=0 \\[2ex] -\dfrac{\partial V}{\partial y}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}m2\dot{y}\right)=0 \\[2ex] -\dfrac{\partial V}{\partial z}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}m2\dot{z}\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = F_x \\ m\ddot{y} = -\dfrac{\partial V}{\partial y} = F_y \, , \text{ όπου } \vec{\nabla} V = \vec{F} \\ m\ddot{z} = -\dfrac{\partial V}{\partial z} = F_z \end{cases}$$

Άρα σε κάθε συντεταγμένη αντιστοιχεί μια εξίσωση Euler.

Ο νόμος του Νεύτωνα (σταθερή μάζα): $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ και γενικεύεται βάσει της αρχής του Hamilton στην $\dfrac{\partial L}{\partial q} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$ μέσω της συνάρτησης Lagrange: $L = L(t, q, \dot{q})$

Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό q για τις συντεταγμένες για να μας υπενθυμίζει ότι ο νόμος του Νεύτωνα και οι εξισώσεις Euler δεν ισχύουν μόνο σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Δηλαδή, θα γίνει σε ένα καρτεσιανό σύστημα (για παράδειγμα): $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$

Αν περιγράφουμε τη θέση ενός σώματος σε καρτεσιανές συντεταγμένες και ορίσουμε τις αντίστοιχες ορμές ανά διάσταση, δηλαδή:

$$\begin{cases} q_1 = x \, , & p_1 = p_x \, , \text{ ορμή στον άξονα } x \\ q_2 = y \, , & p_2 = p_y \quad " \quad " \quad " \quad y \\ q_3 = z \, , & p_3 = p_z \quad " \quad " \quad " \quad z \end{cases}$$

Τότε μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \text{ως} \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\ddot{q}_i \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = f_i \end{cases}$$

ώστε $f_i = m\ddot{q}_i$

Δηλαδή, έχουμε γενικεύσει τις έννοιες της ορμής και της θέσης.

<u>Ορισμός</u>:

Για κάθε συντεταγμένη q_i του φυσικού συστήματος ορίζουμε την αντίστοιχη σε αυτή γενικευμένη ορμή.

$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ και η ποσότητα $\frac{\partial L}{\partial q_i} = f_i$ αντιστοιχίζεται στη γενικευμένη δύναμη ώστε $\boxed{\frac{dp_i}{dt} = f_i}$

Με το τρόπο αυτό δεν γενικεύουμε μόνο τον νόμο του Νεύτωνα που πλέον αποδεικτά ισχύει σε κάθε σύστημα συντεταγμένων αλλά γενικεύουμε και τα θεμελιώδη μεγέθη, δύναμη και ορμή.

Έχουμε επίσης αποδείξει, ότι ο νόμος του Νεύτωνα είναι απολύτως ισοδύναμος με την αρχή διατήρησης της ενέργειας σε συντηρητικά/διατηρήσιμα συστήματα. Επίσης ο φορμαλισμός Lagrange μόνο σε αυτά τα συστήματα εφαρμόζεται, και άρα πρέπει να γενικεύσουμε και την έννοια της ενέργειας.

Εισάγουμε την ποσότητα: $\boxed{E = \dot{q}_i \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L(q,\dot{q},t) \ (=H)}$

που ονομάζεται ολοκλήρωμα κατά Jacobi ή Χαμιλτονιανή του συστήματος, και αποτελεί την άμεση γενίκευση της ενέργειας.

Στα μηχανικά συστήματα που μελετάμε η $L=L(q,\dot{q})$

- Πραγματικά, γενικά:

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)-V(q_1,q_2,q_3) \quad \text{ή}$$

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-V(x,y,z)$$

<u>Τότε:</u>

- $$\frac{dH}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L(q_i,\dot{q}_i)\right)$$

$$=\ddot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}+\dot{q}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t}-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t}$$

$$=\cancel{\ddot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}+\dot{q}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial q_i}-\cancel{\ddot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}$$

$$=\dot{q}_i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)$$

$$=-\dot{q}_i\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)}_{\text{εξίσωση Euler}}=0$$

Άρα, η ποσότητα H είναι μία σταθερή της κίνησης και μπορεί να την αντιστοιχίσω στην ενέργεια.

Άμεση συνέπεια, είναι τα λεγόμενα Πρώτα Ολοκληρώματα.

Απόδειξη:

Η εξίσωση Euler, όπως και ο νόμος του Νεύτωνα είναι μία συνήθης διαφορική εξίσωση 2ης τάξης. Άρα, απαιτεί τη χρήση δύο αυθαίρετων σταθερών. Όμως σε ειδικές περιπτώσεις η συνάρτηση Lagrange απλοποιείται, για παράδειγμα δεν εξαρτάται από μία από τις μεταβλητές $t, q, \dot{q}$.

Θεωρούμε τις περιπτώσεις:

① $L = L(q,t)$, τότε $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$ και συνεπώς από την εξίσωση Euler $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$ (αλγεβρική εξίσωση)

② $L = L(t,\dot{q})$, τότε $\frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = c$ σταθερά. η οποία είναι επίσης μία αλγεβρική εξίσωση.

③ $L = L(q, \dot q)$, δηλαδή το σύστημα διατηρεί τη ποσότητα $\boxed{H = \dot q \frac{\partial L}{\partial \dot q} - L}$

Οι εξισώσεις:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q} = c \quad \text{και} \quad H = \dot q \frac{\partial L}{\partial \dot q} - L$$

● ονομάζονται πρώτα ολοκληρώματα (ή ολοκληρώματα της κίνησης)

Γενικά το πρώτο ολοκλήρωμα μιας διαφορικής εξίσωσης της μορφής: $f = f(x, y, y', y'') = 0$ είναι η συνάρτηση $g = g(x, y, y')$ που παραμένει σταθερή αν η y είναι η λύση της $f = 0$

● <u>Παράδειγμα</u>

Ο νόμος του Νεύτωνα σε μια διάσταση

$$m\ddot x = F = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow m\ddot x \dot x = -\frac{dV}{dx}\dot x$$ ολοκληρώνουμε:

$$m\int \ddot x \dot x \, dt = -\int \frac{dV}{dx}\dot x \, dt \Rightarrow m\frac{(\dot x)^2}{2} = -\int \frac{dV}{dx}\underbrace{\dot x \, dt}_{dx}$$

$$\left(dx = \frac{dx}{dt}dt = \dot x \, dt\right)$$

$$\Rightarrow m\frac{(\dot{x})^2}{2} = -\int \frac{dV}{dx}\,dx = -\int dV = -V + \cancel{c} \to E$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + V(x)} \rightsquigarrow \text{πρώτο ολοκλήρωμα}$$

Αντίστοιχα, από το φορμαλισμό Lagrange:

$T = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2$, $V = V(x)$ άρα

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 - V(x)$$

$$H = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L$$

$$= \dot{x}\left(\frac{1}{2}m2\dot{x}\right) - \left[\frac{1}{2}m(\dot{x})^2 - V(x)\right]$$

$$= m(\dot{x})^2 - \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 - (-V(x))$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + V(x)$$

Άρα η Χαμιλτονιανή αντιστοιχεί στην ενέργεια

<u>Αντίστροφα:</u>

Γνωρίζοντας τον νόμο του Νεύτωνα $m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$ υπολογίζω το <u>πρώτο ολοκλήρωμα</u> και ορίζω κινητική ενέργεια $T = T((\dot{x})^2)$ και δυναμική ενέργεια $V = V(x)$.

Άρα, από την εξίσωση Lagrange μπορώ να βρω την εξίσωση κίνησης (δηλ. την εξίσωση του Νεύτωνα) και από την εξίσωση του Νεύτωνα μέσω του πρώτου ολοκληρώματος, ορίζω κινητική και δυναμική ενέργεια και βρίσκω τη συνάρτηση Lagrange.